1. Montrons que f admet deux points invariants.

$f(M)=M \Leftrightarrow z'=z \Leftrightarrow \dfrac{z+iz\overline{z}}{1+z\overline{z}}=z \Leftrightarrow z+iz\overline{z}=z(1+z\overline{z}) \Leftrightarrow iz\overline{z}=z^2\overline{z} \Leftrightarrow z \Leftrightarrow z\overline{z}(i-z)=0$

$\Leftrightarrow (z=0)$ ou $(z=i) \Leftrightarrow (M=O)$ ou $(M=A)$.

$\boxed{\text{conclusion : les points invariants par } f \text{ sont } O \text{ et } A.}$

2. Montrons que pour complexe z, les points A, M et M' sont alignés. D'abord si $M=A$ alors $M'=A$ donc on peut dire que les points sont alignés, supposons maintenant que $M\neq A$ dans ce cas :

$z'-i=\dfrac{z+iz\overline{z}}{1+z\overline{z}}-i=\dfrac{z+iz\overline{z}}{1+z\overline{z}}-\dfrac{i(1+z\overline{z})}{1+z\overline{z}}=\dfrac{z-i}{1+z\overline{z}}$, on en déduit alors :

$\boxed{\dfrac{z'-i}{z-i}=\dfrac{1}{1+z\overline{z}}=\dfrac{1}{1+|z|^2}\in\mathbb{R}}$,

ainsi les points A, M et M' sont alignés.

3. Soit $\mathscr{C}_1$ le cercle de diamètre $[OB]$.

a) Montrons $\forall M\in\mathscr{C}_1\setminus\{O,B\}$, on a : $\arg(z')\equiv\dfrac{\pi}{2}+\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO}}\right)(2\pi)$.

On a : $\boxed{\dfrac{z'}{\dfrac{z}{z+i}}=z'.\dfrac{z+i}{z}=\dfrac{z(1+i\overline{z})}{1+z\overline{z}}.\dfrac{z+i}{z}=\dfrac{(1+i\overline{z})(z+i)}{1+|z|^2}=\dfrac{i(\overline{z}+i)(z+i)}{1+|z|^2}=i\dfrac{|z+i|^2}{1+|z|^2}\in i\mathbb{R}_+^*}$

il s'en suit que $\arg\left(\dfrac{z'}{\dfrac{z}{z+i}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$. Par conséquent $\arg(z')\equiv\dfrac{\pi}{2}+\arg\left(\dfrac{z}{z+i}\right)(2\pi)$, or on sait que $\arg\left(\dfrac{z}{z+i}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO}}\right)(2\pi)$, d'où le résultat demandé.

b) Si $M\in\mathscr{C}_1\setminus\{O,B\}$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}(\pi)$ donc $\arg(z')\equiv 0(\pi)$ ce qui implique que M' est un point de l'axe des abscisses.

c) D'après ce qui précède on a : $M'\in(AM)$ et $M'\in(O,\vec{u})$, donc $\{M'\}=(AM)\cap(O,\vec{u})$, d'où la construction du point M' image d'un point M de $\mathscr{C}_1$.

4. Si $M\in\mathscr{C}(O,1)$, alors $OM=1$ donc $z\overline{z}=1$, il vient $z'=\dfrac{z+i}{2}$ c-à-d $M'=A*M$, on peut écrire alors que $\overrightarrow{AM'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}$ c-à- d $M'=H_{(A,\frac{1}{2})}(M)$.

Par conséquent $\boxed{f(\mathscr{C}(O,1))=H_{(A,\frac{1}{2})}(\mathscr{C}(O,1))=\mathscr{C}\left(I(\frac{i}{2}),\frac{1}{2}\right).}$

Exercice 2 : Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On considère les point A et B d'affixes respectives 1 et (-1) et on désigne par P' le plan privé du point A.

Soit f l'application de P' dans P qui à tout point M de P' d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\dfrac{z(\overline{z}-1)}{z-1}$

1. a) Montrons que $|z'|=|z|$. Pour $z\neq 1$, on peut écrire :

$\boxed{|z'|=\left|\dfrac{z(\overline{z}-1)}{z-1}\right|=|z|\dfrac{|\overline{z}-1|}{|z-1|}=|z|\dfrac{|\overline{z-1}|}{|z-1|}=|z|\dfrac{|z-1|}{|z-1|}=|z|}$.

Comme $|z'|=|z|$ alors $OM=OM'$ c-à-d M' est un point du cercle de centre O et passant par M

b) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Montrons que pour tout M de $\mathscr{C}\setminus\{A\}$ on a : $f(M)=B$.

Comme $M\in\mathscr{C}$ alors $OM=|z|=1$ par suite $1=|z|^2=z\overline{z}$. Pour $z\neq 1$, on peut écrire

$\boxed{\text{aff}(f(M))=z'=\dfrac{z\overline{z}-z}{z-1}=\dfrac{1-z}{z-1}=-1=\text{aff}(B)\text{ d'où f(M)=B}}$

2. Déterminons l'ensemble des points invariants par f. Pour $M \neq A$, on peut écrire :

M est invariant par $f \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow z = z' \Leftrightarrow z = \dfrac{z(\overline{z}-1)}{z-1} \Leftrightarrow \begin{cases} z(z-1) = z(\overline{z}-1) \\ z \neq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z(z-1) - z(\overline{z}-1) = 0 \\ z \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z(z-\overline{z}) = 0 \\ z \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \text{ ou } z = \overline{z} \\ z \neq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z \in \mathbb{R} \\ z \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow M \in (O, \vec{u}) \setminus \{A\}$

3. Soit M un point quelconque du plan privé de la droite (AB) et du cercle $\mathscr{C}$. On désigne par M_1 l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (AB) et par M' l'image de M par f.

a) $M_1 = S_{(O,\vec{u})}(M)$ donc $z_{M_1} = \overline{z}$. Pour $z \neq 1$, on peut écrire :

$$\boxed{z_{\overrightarrow{M_1M'}} = z' - z_{M_1} = z' - \overline{z} = \frac{z(\overline{z}-1)}{z-1} - \overline{z} = \frac{z(\overline{z}-1) - \overline{z}(z-1)}{z-1} = \frac{\overline{z}-z}{z-1}}$$

et comme $z_{\overrightarrow{AM_1}} = \overline{z} - 1 \neq 0$, on en déduit que $\boxed{\dfrac{z_{\overrightarrow{M_1M'}}}{z_{\overrightarrow{AM_1}}} = \dfrac{\overline{z}-z}{|z-1|^2}}$ comme

$\dfrac{\overline{z}-z}{|z-1|^2} = \dfrac{-2Im(z)}{|z-1|^2} i$ donc $\dfrac{z_{\overrightarrow{M_1M'}}}{z_{\overrightarrow{AM_1}}}$ est imaginaire pure.

Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{AM_1}$ sont orthogonaux

b) Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont orthogonaux. Pour tout $M \neq A$ on peut écrire :

$z_{\overrightarrow{BM'}} = z' + 1 = \dfrac{z(\overline{z}-1)}{z-1} + 1 = \dfrac{z(\overline{z}-1) + z - 1}{z-1} = \dfrac{\overline{z}z - 1}{z-1}$.

$\dfrac{z_{\overrightarrow{BM'}}}{z_{\overrightarrow{M_1M'}}} = \dfrac{\overline{z}z-1}{\overline{z}-z} = \dfrac{|z|^2-1}{-2i\text{Im}(z)} = \dfrac{|z|^2-1}{2\text{Im}(z)} i \in i\mathbb{R}$,

Conclusion : $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont orthogonaux.

c) On remarque d'abord que $M_1 \neq A \neq$ et $M' \neq M_1$ d'autre part les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{AM_1}$ sont orthogonaux donc M' est un point de la droite Δ_{M_1} passant par M_1 et perpendiculaire à la droite (AM_1) et comme M' est un point du cercle $\mathscr{C}_{M_1}$ de centre O et passant par M et M_1 donc M' est l'intersection Δ_{M_1} et $\mathscr{C}_{M_1}$ autre que M_1 (car $M_1 \neq M'$).

Exercice 3 : Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et I d'affixes respectives 1, $\dfrac{1}{2}$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{1}{2}$.On note $\mathbb{C}' = \left\{z \in \mathbb{C} / 2|z|^2 - (z+\overline{z}) \neq 0\right\}$

1. Montrons l'équivalence suivante : $M(z) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow 2|z|^2 - (z+\overline{z}) = 0$.

$M(z) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow IM = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left|z - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left|z - \dfrac{1}{2}\right|^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow (z - \dfrac{1}{2})(\overline{z} - \dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow z\overline{z} - \dfrac{1}{2}(z+\overline{z}) + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow z\overline{z} - \dfrac{1}{2}(z+\overline{z}) = 0 \Leftrightarrow 2z\overline{z} - (z+\overline{z}) = 0$.

2. Soit $f : \mathscr{P} \setminus \{\mathscr{C}\} \longrightarrow \mathscr{P}$

$$M(z) \longmapsto M'(z') \text{ tels que } z' = \frac{z\left(|z|^2 - 1\right)}{2|z|^2 - (z+\overline{z})}.$$

a) Montrons que pour tout $z \in \mathbb{C}'$, on $\dfrac{z'}{z}$ est réel. Pour tout $z \neq 0$, on peut écrire :

$\dfrac{z'}{z} = \dfrac{\left(|z|^2-1\right)}{2|z|^2 - (z+\overline{z})} = \dfrac{\left(|z|^2-1\right)}{2|z|^2 - 2\text{Re}(z)}$, par suite $\dfrac{z'}{z}$ est réel.

b) Montrons que pour tout $z \in \mathbb{C}'$, on a : $z - z' = \dfrac{z\left|z-1\right|^2}{2\left|z\right|^2 - (z+\overline{z})}$.

$$z - z' = z - \frac{z\left(|z|^2 - 1\right)}{2|z|^2 - (z+\overline{z})} = \frac{z(2|z|^2 - (z+\overline{z})) - z\left(|z|^2-1\right)}{2|z|^2 - (z+\overline{z})} = \frac{z(|z|^2 - (z+\overline{z}) + 1)}{2|z|^2 - (z+\overline{z})}$$
$$= \frac{z(z\overline{z} - (z+\overline{z}) + 1)}{2|z|^2 - (z+\overline{z})} = \frac{z(z-1)(\overline{z}-1)}{2|z|^2 - (z+\overline{z})} = \frac{z\left|z-1\right|^2}{2|z|^2 - (z+\overline{z})}.$$

Déduisons que $\left|z' - z\right| = \left|z' - 1\right|$.

$$z' - 1 = \frac{z\left(|z|^2 - 1\right)}{2|z|^2 - (z+\overline{z})} - 1 = \frac{z\left(|z|^2-1\right) - 2|z|^2 + (z+\overline{z})}{2|z|^2 - (z+\overline{z})}$$
$$= \frac{z\left|z\right|^2 - 2\left|z\right|^2 + \overline{z}}{2|z|^2 - (z+\overline{z})} = \frac{\overline{z}(z^2 - 2z + 1)}{2|z|^2 - (z+\overline{z})} = \frac{\overline{z}(z-1)^2}{2|z|^2 - (z+\overline{z})}.$$

Par conséquent $\left|z'-z\right| = \dfrac{|z|\left|z-1\right|^2}{\left|2|z|^2 - (z+\overline{z})\right|}$ et $\left|z'-1\right| = \dfrac{|\overline{z}|\left|(z-1)^2\right|}{\left|2|z|^2 - (z+\overline{z})\right|} = \dfrac{|z|\left|z-1\right|^2}{\left|2|z|^2 - (z+\overline{z})\right|}$,
on en déduit alors que $\left|z'-1\right| = \left|z'-z\right|$

c) Construisons le point M' connaissant M dans $P \setminus \{\mathscr{C}\}$. D'après ce qui précède on a : $\dfrac{z'}{z}$ est réel donc $M' \in (OM)$ et $\left|z'-z\right| = \left|z'-1\right|$ c-à-d $AM' = MM'$ don M' est un point der la médiatrice du segment $[AM]$, il en résulte que $\{M'\} = (OM) \cap$ med $[AM]$

3. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}'$ de centre O et de rayon r avec $r > 1$.

a) On remarque d'abord que $z' \neq 0$ et $z' - z \neq 0$, donc pour montrer que M' est un point du segment $[OM] \setminus \{O, M\}$. Il suffit de montrer que $\left(\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}\right) \equiv \pi(2\pi)$, ce qui équivaut à $\dfrac{z'-z}{z'}$ est un réel strictement négatif.

D'après 2.b) $z' - z = -\dfrac{z\left|z-1\right|^2}{2|z|^2 - (z+\overline{z})}$ et comme $|z| > 1$ donc $z \neq 0$, $z \neq 1$ et $|z|^2 - 1 > 0$ par suite
$\dfrac{z'-z}{z'} = -\dfrac{\left|z-1\right|^2}{|z|^2 - 1} = -\dfrac{\left|z-1\right|^2}{r^2 - 1} \in \mathbb{R}_-^*$, puisque $r > 1$.

b) Déduisons que $OM' + AM' = r$. Comme $M' \in [OM]$ donc $OM = OM' + M'M$ d'autre part $M' \in$med$[AM]$, donc $M'M = M'A$, par suite $OM = OM' + M'A$ or $OM = r$ il vient $r = OM' + AM'$.

<u>**Exercice 4 :**</u> Soit θ un réel de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On pose $u = \left(1 + i\sqrt{3}\right) + \left(i - \sqrt{3}\right)\text{tg}\theta$.

1. D'abord on a :
$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\cos\theta}\right)e^{i\theta} = \left(1+i\sqrt{3}\right)\frac{e^{i\theta}}{\cos\theta} = \left(1+i\sqrt{3}\right)(1 + i\text{tg}\theta) = (1+i\sqrt{3}) + i(1+i\sqrt{3})\text{tg}\theta$$
$$= \left(1+i\sqrt{3}\right) + \left(i - \sqrt{3}\right)\text{tg}\theta.$$

Déterminons maintenant la forme exponentielle de u.
$\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\cos\theta} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\cos\theta} = \dfrac{2}{\cos\theta}e^{i\frac{\pi}{3}} \Longrightarrow u = \dfrac{2}{\cos\theta}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\theta} = \dfrac{2}{\cos\theta}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$, Cette dernière écriture est la forme exponentielle de u puisque $0 < \cos\theta$.

2. On prend $\theta = \dfrac{-\pi}{4}$

a) Dans ce cas $u = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$, ce qui donne la forme trigonométrique de u.

b) Écrivons d'abord u sous forme algébrique, $u = \left(1+i\sqrt{3}\right) + \left(i - \sqrt{3}\right)\text{tg}\dfrac{\pi}{4}$.
Comme $\text{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, $u = 1 + i\sqrt{3} + i - \sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})$,
par suite $u = 1 - \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3}) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$,

en identifiant la partie réelle et la partie imaginaire de u, on obtient $\begin{cases} 1-\sqrt{3}=2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \\ \\ 1+\sqrt{3}=2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \end{cases}$.

Par conséquent $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$.

Exercice 5 :

Soit θ un réel de l'intervalle $[0,2\pi]$.

1. On considère l'équation (E_θ) d'inconnue z : $z^2-iz-ie^{i\theta}-e^{2i\theta}=0$.

2. Résolution dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E_θ).

Le discriminant de cette équation est $\Delta=(i)^2+4ie^{i\theta}+4e^{2i\theta}=\left(2e^{i\theta}+i\right)^2$, donc $\delta=2e^{i\theta}+i$ est une raine carrée de Δ, donc (E_θ) possède deux solutions complexes $z_1=\dfrac{i+2e^{i\theta}+i}{2}=e^{i\theta}+i$ et $z_2=\dfrac{i-2e^{i\theta}-i}{2}=-e^{i\theta}$. L'ensemble des solutions de (E_θ) est : $\boxed{S=\left\{e^{i\theta}+i,-e^{i\theta}\right\}}$

a) Si $\theta=0$ alors $z_1=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2=-1=e^{i\pi}$

3. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $-e^{i\theta}$ et $i+e^{i\theta}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$.

a) Montrons que M_1 varie sur un cercle $\mathscr{C}$ que l'on déterminera. Comme $z_1=-e^{i\theta}$ donc $|z_1|=1$, par suite M_1 est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

b) Calculons l'affixe du milieu du segment $[M_1M_2]$.$z_I=\dfrac{z_1+z_2}{2}=\dfrac{1}{2}i$

Comme $M_2=S_I(M_1)$ donc M_2 est un point du cercle symétrie de $\mathscr{C}$ par rapport à I, ainsi donc M_2 est un point du cercle $\mathscr{C}'$ de centre $A(i)$ et de rayon 1.

4. Déterminer θ pour que les points O, M_1 et M_2 soient alignés. Comme $z_{\overrightarrow{OM_1}}\neq 0$, on peut écrire :

$\dfrac{z_{\overrightarrow{OM_2}}}{z_{\overrightarrow{OM_1}}}=\dfrac{i+e^{i\theta}}{-e^{i\theta}}=-ie^{i\theta}-1=-i(\cos\theta-i\sin\theta)-1=-1-\sin\theta-i\cos\theta.$

O, M_1 et M_2 soient alignés $\Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{OM_2}}}{z_{\overrightarrow{OM_1}}}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\cos\theta=0\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ou $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$.

Exercice 6 :

Soit m un nombre complexe de module $\sqrt{2}$.

1. a) Résolution dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_m) : $mz^2-2z+\overline{m}=0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta'=1-m\overline{m}=1-|m|^2=1-2=-1$, d'où $\delta'=i$ est une racine carrée de Δ', donc (E_m) possède deux solutions complexes $z'=\dfrac{1+i}{m}$ et $z''=\dfrac{1-i}{m}$. L'ensemble des solutions de (E_m) est : $\boxed{S=\left\{\dfrac{1+i}{m},\dfrac{1-i}{m}\right\}}$

b) Dans la suite on prend $m=\sqrt{2}e^{i\theta}$ ou $\theta\in[0,2\pi[$. Montrons que les racines z' et z'' de l'équation (E_m) s'écrivent sous la forme : $z'=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$ et $z''=e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$.

$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc on peut écrire :

$z'=\dfrac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\theta}}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$, de même $z''=\dfrac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\theta}}=e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$

2. Dans le plan complexe on désigne par les points M', M'' et M les points d'affixes respectives z',z'' et $z'+z''$; $I = M' * M''$

a) Déterminons les ensembles décrit par M' et I.

$z' = z_{M'} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$ donc $|z'| = 1$ et $\arg(z') \equiv \dfrac{\pi}{4} - \theta)(2\pi)$,

on en déduit alors : $\begin{cases} OM' = 1 \\ \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4} - \theta(2\pi) \end{cases}$ et comme $\dfrac{\pi}{4} - \theta$ décrit $]\dfrac{\pi}{4} - 2\pi, \dfrac{\pi}{4}]$ donc M' décrit tout le cercle de centre O et de rayon 1.

$z_I = \dfrac{z'+z''}{2} = \dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{\sqrt{2}e^{i\theta}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\theta}$, par suite $|z_I = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\arg(z_I) \equiv -\theta(2\pi)$, on en déduit alors :

$$\begin{cases} OI = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OI}}\right) \equiv -\theta(2\pi) \end{cases}$$

et comme $-\theta$ décrit $]-2\pi, 0[$ donc I décrit tout le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Montrons que les points O, M' et M'' ne sont pas alignés et que les vecteurs. On remarque que $z'' \neq 0$ donc on peut écrire : $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont orthogonaux.

$\dfrac{z'}{z''} = \dfrac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}}{e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \in i\mathbb{R}^*$ donc les points O, M' et M'' ne sont pas alignés et les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont orthogonaux.

c) Pour montrer que le quadrilatère $OM'MM''$ est un carré, il faut montrer que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{M''M}$, $OM' = OM''$ et $\overrightarrow{OM'} \perp \overrightarrow{OM''}$ les deux dernières conditions sont satisfaites il nous reste à montrer que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{M''M}$.

$z_{\overrightarrow{OM'}} = z'$ et $z_{\overrightarrow{M''M}} = z - z'' = z' + z'' - z'' = z' = z_{\overrightarrow{OM'}}$, on en déduit que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{M''M}$

Conclusion : le quadrilatère $OM'MM''$ est un carré